
Progetto CRESCO

Centro computazionale di RicErca sui Sistemi Complessi

SP IIL.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti

Deliverable 5

Report sull'Ottimizzazione della qualità di servizio

Unità operativa DIIMA
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata
Università di Salerno



27/05/2008

Responsabile Unità Operativa
Prof. Ciro D'Apice

SOMMARIO

Prefazione	3
Introduzione.....	4
1 Modello per reti di telecomunicazione.....	6
2 Gestione delle criticità in una rete e problematiche connesse	9
3 Metodologia proposta per la risoluzione del problema.....	14
4 Equilibri per reti di dati	17
4.1 Modellazione di flussi su rete	19
4.2 Notazioni e risultati standard	23
4.2.1 La funzione segno delle matrici	23
4.2.2 I prodotti di Kronecker di matrici	24
4.2.3 Equazione matriciale.....	24
4.2.4 Equazioni di Sylvester	25
4.3 Reti del tipo Manhattan.....	26
4.4 Oriented Manhattan.....	30
4.4.1 Soluzioni quantitative per la rete senza buchi.....	30
4.4.2 Soluzione esatta senza buchi.....	32
4.4.3 Soluzione esatta con buco in posizione lk	34
5 Bibliografia	37

Prefazione

Le attività previste dal Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata dell'Università di Salerno nell'ambito del progetto Cresco, inquadrato nel **SP III.3 Modelli e Strumenti di supporto alla Ottimizzazione e Riconfigurazione delle Reti**, fanno riferimento al raffinamento di un modello fluidodinamico basato sulle leggi di conservazione, punto di partenza per lo studio di schemi numerici e la loro implementazione al fine di simulare una rete di telecomunicazioni ed eseguire uno studio di ottimizzazione della qualità dei servizi erogati dalla rete soggetta a guasti e/o attacchi deliberati a livello fisico.

In particolar modo, nel presente rilascio, è stata definita una metodologia capace di garantire un'elevata qualità di servizio in reti soggette a forti carichi anche in presenza di criticità verificatesi localmente in determinati nodi del sistema.

Il documento è articolato in quattro differenti sezioni. Inizialmente, dopo una breve descrizione del modello usato per l'analisi dei flussi di pacchetti su reti di telecomunicazioni, si presenterà la soluzione attualmente in uso per la gestione di criticità occorse in una network evidenziandone gli aspetti positivi e le problematiche ad essa connesse. Successivamente si passerà a descrivere la soluzione adottata confrontandola con le metodologie attualmente utilizzate. Infine si procederà alla formulazione matematica della procedura che permette di adeguare i flussi in circolo sulla sottorete soggetta a criticità.

Introduzione

Il crescente sviluppo tecnologico avvenuto negli ultimi anni, unitamente alla riduzione dei costi degli apparati hardware ed alla robustezza degli applicativi software, ha fatto sì che la gran parte delle infrastrutture alla base dei fondamentali settori della società moderna, Economia, Energia, Trasporti, Comunicazione, Produzione, siano ormai dipendenti e interconnessi mediante *networks* che garantiscono il corretto svolgimento della vita della società civile.

Tali *networks* devono permettere l'operatività della CNI (Critical Network Infrastructure) in normali condizioni di funzionamento, ma anche e soprattutto garantire un'adeguata capacità operativa in caso di eventi critici. Per la regolare interoperabilità e per il corretto funzionamento, le *networks* utilizzate da tali infrastrutture, si basano sempre di più sulle reti di telecomunicazione.

Le reti di telecomunicazioni rappresentano nel panorama tecnologico mondiale l'infrastruttura di riferimento senza la quale non sarebbe possibile trasferire segnali, dati, informazioni, ovvero consentire il corretto coordinamento e la relativa cooperazione tra risorse (umane o tecnologiche) locali e remote.

La distribuzione capillare su tutto il territorio nazionale ed internazionale, la possibilità di interconnessione con reti eterogenee ed il crescente carico di informazioni in circolo localmente o globalmente su reti locali e mondiali comporta però tutta una serie di criticità cui tali sistemi sono soggetti. Tra questi ricordiamo:

- difficoltà di presidio di tutte le installazioni;
- potenziali problemi di coordinamento e intercomunicazione;
- difficoltà legate al rapido intervento e ripristino da guasti;
- elevato rischio di intrusione;
- necessità di punti d'accesso controllati e sicuri per comunicazioni multi-protocollo.

Fino ad un decennio fa, ogni infrastruttura eterogenea, poteva considerarsi come un sistema autonomo sostanzialmente indipendente, gestito da operatori verticalmente integrati. Per una serie di ragioni tale struttura si è profondamente modificata al punto che sempre di più le varie infrastrutture tendono a essere interdipendenti, soprattutto a causa della condivisione del cosiddetto cyberspace, ovvero lo spazio virtuale prodotto dall'interconnessione di calcolatori collegati in rete, da sistemi di telecomunicazioni, applicazioni e dati. Ciò comporta che anche un singolo guasto locale ad un nodo di una qualsiasi sottorete può facilmente propagarsi, con un effetto domino, all'intera infrastruttura globale amplificando i suoi effetti e provocando disfunzioni e

malfunzionamenti anche ad utenti remoti, sia dal punto di vista geografico che funzionale, rispetto al punto ove si è verificato il guasto iniziale.

Il black-out che ha afflitto buona parte della costa nord-orientale degli Stati Uniti nell'agosto del 2003 è un evidente esempio di come un guasto ad alcuni nodi del sistema informatico di controllo di una società di distribuzione, unito ad altri eventi fortuiti, possa indurre la quasi totale paralisi di tutte le infrastrutture esistenti nell'area provocando danni dell'ordine di miliardi di dollari.

Questo anche in considerazione del fatto che, soprattutto in seguito alla diffusione delle tecnologie proprie della Società dell'Informazione, le reti di telecomunicazione hanno sviluppato una crescente interdipendenza per cui anche azioni svolte in una rete locale possono avere immediate ripercussioni in altre sottoreti, o nel caso peggiore, su intere reti globali di riferimento. In particolare, l'elevato livello di interconnessione caratterizzante tali sistemi, se da un lato garantisce una stretta cooperazione ed una elevata coordinazione tra entità differenti, dall'altro comporta una moltiplicazione ed amplificazione degli effetti per cui anche eventi di limitata entità possono produrre un impatto notevole e geograficamente non circoscritto.

L'attuale scenario è caratterizzato, pertanto, sia da accresciute e differenziate minacce nei confronti dei singoli host di una rete di telecomunicazione sia da un mutato contesto infrastrutturale che induce, a causa delle interdipendenze esistenti, nuove tipologie di vulnerabilità. Ciò impone una maggiore e diversa attenzione a tutti gli aspetti di protezione e robustezza in generale ed alle problematiche legate alla safety dei sistemi in particolare, sia specificatamente per ogni singola sottorete, che complessivamente ed unitariamente, per l'insieme delle reti nazionali ed internazionali.

Dalle osservazioni esposte si evince che la sola modellazione e simulazione di una rete di telecomunicazione, sia essa locale o globale, non è sufficiente a garantirne prestazioni dell'infrastruttura elevate nel tempo. Risulta pertanto di fondamentale necessità la possibilità di disporre di procedure atte a gestire e risolvere eventuali criticità cui la rete può essere sottoposta, garantendo allo stesso modo un buon livello di servizio nell'attesa di ripristinare il corretto funzionamento dell'intero sistema.

Nell'ambito del progetto CRESCO dopo aver definito il modello fluidodinamico per la modellazione e simulazione del carico di informazioni in una rete di telecomunicazioni, dopo aver trattato le possibili politiche di instradamento ed aver progettato e sviluppato differenti procedure capaci di ottimizzare il flusso di frame che attraversano i singoli nodi della rete esaminata, si è passati allo studio e definizione di una metodologia capace di garantire un elevato livello di servizio del sistema anche in presenza di nodi failure. Tale procedura permetterà di adattare al meglio il flusso di informazioni che dovranno circolare localmente nella rete soggetta a criticità al fine di

garantire il miglior livello di operabilità della stessa evitando pertanto cali di prestazioni e, soprattutto, eventuali black-out con relativi danni economici, funzionali e strutturali che, tali scenari, potrebbero comportare.

1 Modello per reti di telecomunicazione

Nel modello realizzato la rete viene descritta da un numero finito di linee di trasmissione modellate da intervalli $[a_i, b_i]$ (con uno dei due estremi possibilmente infinito) che si incontrano in qualche nodo (routers) che riceve e invia informazioni in forma di pacchetti. Ciascun pacchetto può essere visto come una particella sulla rete, ma bisogna tener conto di questioni specifiche di telecomunicazioni, ad esempio avendo in mente la rete Internet si assume che ciascun pacchetto viaggia sulla rete ad una fissata velocità e con un'assegnata destinazione finale e che i routers ricevono, processano e instradano i pacchetti che possono essere persi con una probabilità che aumenta all'aumentare dei pacchetti processati.

L'idea è di guardare alla rete in una scala temporale intermedia in modo tale che la trasmissione dei pacchetti avviene ad un livello più veloce ma gli equilibri della intera rete sono raggiunti solo asintoticamente. Ciò permette di costruire un modello che si basa su una descrizione macroscopica. Se si considerano due routers consecutivi, poichè ciascun router rimanda al nodo successivo i pacchetti persi fin quando non arriva ad esso il segnale di ricezione, si può assumere che in una scala temporale intermedia i pacchetti sono conservati. Passando poi a "backbones" della rete, che sono formati da molti router consecutivi, e guardando in una scala spaziale larga, si arriva a considerare un modello consistente in una singola legge di conservazione, in cui la quantità conservata è la densità di pacchetto:

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0, \quad (1)$$

dove ρ è la densità dei pacchetti (numero di pacchetti per unità di spazio) ed $f = \rho v(\rho)$ è il flusso (numero di pacchetti per unità di tempo), con $v(\rho)$ velocità di trasmissione dei pacchetti.

Poiché la velocità su ciascuna linea è supposta costante, è possibile ricavare una velocità media di trasmissione tra i routers considerando la quantità di pacchetti che può essere persa. Assegnando una probabilità di perdita di pacchetto come funzione della densità, passando al limite nella procedura di invio e rinvio dei pacchetti si ottiene una funzione velocità e quindi una funzione flusso.

Si è supposta una funzione di probabilità di perdita di pacchetti del tipo:

$$p(\rho) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \frac{2(\rho - \sigma)}{\rho}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

dove $\rho_{\max}$ è la densità massima supportata da una linea, e σ è un valore soglia prefissato.

A partire da tale probabilità si è ricavata una velocità media di trasmissione

$$v(\rho) = \bar{v}(1 - p(\rho)) = \begin{cases} \bar{v}, & 0 \leq \rho \leq \sigma, \\ \bar{v} \frac{(2\sigma - \rho)}{\rho}, & \sigma \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

e da qui la funzione flusso.

Su ciascuna linea di trasmissione viene anche considerato un vettore π che descrive le funzioni di tipo traffico, cioè le percentuali di pacchetti che vanno da una fissata origine ad una fissata destinazione. L'evoluzione di π segue un'equazione semilineare

$$\pi_t + v(\rho)\pi_x = 0, \quad (2)$$

che viene accoppiata alla legge di conservazione.

Poiché l'obiettivo è quello di modellare reti complesse è stata risolta la dinamica ai nodi in cui molte linee si intersecano. Il passo principale per la risoluzione del Problema di Cauchy ai nodi consiste nella risoluzione del problema di Riemann, problema di Cauchy con dati iniziali di tipo Heavy-side. Alle giunzioni i Problemi di Riemann sono sottodeterminati per cui sono stati introdotti ulteriori condizioni. Sono stati considerati due algoritmi di instradamento dei pacchetti:

RA1: I pacchetti dalle linee entranti vanno su quelle uscenti in base alla destinazione finale.

RA2: I pacchetti dalle linee entranti vanno instradati su quelle uscenti al fine di massimizzare il numero di pacchetti sulle linee entranti ed uscenti.

La differenza principale nei due algoritmi è che mentre il primo è indifferente a possibili sovraccarichi della rete, e si comporta con abuso di notazione come uno “switch”, il secondo indirizza i pacchetti sulle linee uscenti tenendo in considerazione i carichi e dunque ridirezionando i pacchetti in modo tale da massimizzare il flusso sia sulle linee entranti che su quelle uscenti. Ancora con qualche abuso di notazione, potremmo dire che il secondo algoritmo si comporta come un “router”.

Uno dei drawbacks dei precedenti algoritmi è che non considera il percorso globale dei pacchetti. Per esempio consideriamo una rete in cui alcuni nodi sono congestionati: se usiamo l'algoritmo RA2 che massimizza il flusso sulle linee entranti ed uscenti i pacchetti non sono instradati verso nodi congestionati, per cui potrebbero entrare in loops.

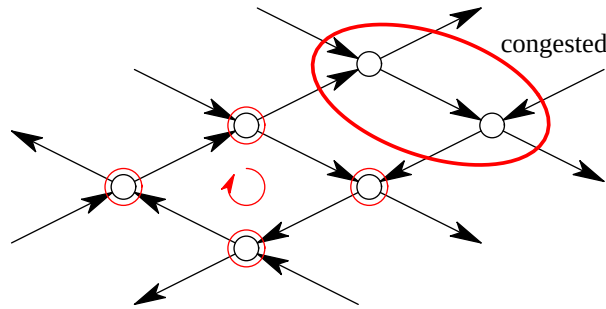


Figura 1.1 Rete congestionata e loops.

Questi ultimi sono evitati se si considerano che i pacchetti originati da una sorgente e con un'assegnata destinazione hanno percorsi precisi all'interno della rete. Tali percorsi sono determinati dal comportamento alle giunzioni attraverso il vettore π che soddisfa l'equazione (2).

Sono state considerate diverse funzioni di distribuzioni del traffico che descrivono diverse strategie di routing:

- 1) ad una giunzione il traffico iniziato da una sorgente s e con destinazione finale d , proveniente dalla linea di trasmissione i , viene instradato su un'assegnata linea j ;
- 2) ad una giunzione il traffico iniziato da una sorgente s e con destinazione finale d , proveniente dalla linea di trasmissione i , viene instradato su ogni linea (con coefficienti probabilistici) o su alcune di esse.

La prima funzione di distribuzione del traffico era già stata considerata per il traffico stradale, per cui ci è focalizzati sulla seconda, in particolare sono stati analizzate due casi:

- 2a) in una giunzione il traffico proveniente da un'assegnata sorgente e con un'assegnata destinazione viene instradato o non instradato su una linea uscente;
- 2b) in una giunzione il traffico proveniente da un'assegnata sorgente e con un'assegnata destinazione viene instradato su ogni linea uscente con una certa probabilità.

Partendo da una funzione di distribuzione del traffico ed usando il vettore π , si calcola la matrice di distribuzione del traffico.

Per risolvere la dinamica ai nodi infine sono state definite le soluzioni ai Problemi di Riemann nei seguenti casi:

- Algoritmo RA1, funzione di distribuzione di tipo 2a);
- Algoritmo RA1, funzione di distribuzione di tipo 2b);
- Algoritmo RA2 funzione di distribuzione di tipo 2a);
- Algoritmo RA2 funzione di distribuzione di tipo 2b).

2 Gestione delle criticità in una rete e problematiche connesse

In funzione di quanto accennato nell'introduzione si evince come la presenza di criticità occorre anche solo localmente ad un singolo host di una determinata sottorete possa comportare tutta una serie di malfunzionamenti propagabili su intere reti globali di grosse dimensioni. Le conseguenze possono in alcuni casi essere catastrofiche e non circoscritte al singolo servizio offerto dal nodo soggetto a malfunzionamenti ma estendibili anche a funzionalità apparentemente indipendenti.

Analizziamo nel dettaglio la problematica descritta osservando le tecniche attualmente in uso per la sua risoluzione.

Consideriamo una sottorete facente parte di una infrastruttura globale di grosse dimensioni. Supponiamo che tale sottorete, nel seguito indicata con A , sia composta da n nodi ed m archi, che i suoi nodi siano identificati da un codice univoco progressivo che vada da 1 ad n e che ogni link sia etichettato con una coppia di valori numerici i,j con $i,j=0\dots n$ indicanti i nodi collegati alle estremità dell'arco. Senza perdere in generalità prediamo in esame un sistema con un numero di nodi $n = 9$ ed un numero di archi $m = 24$ come indicato in figura:

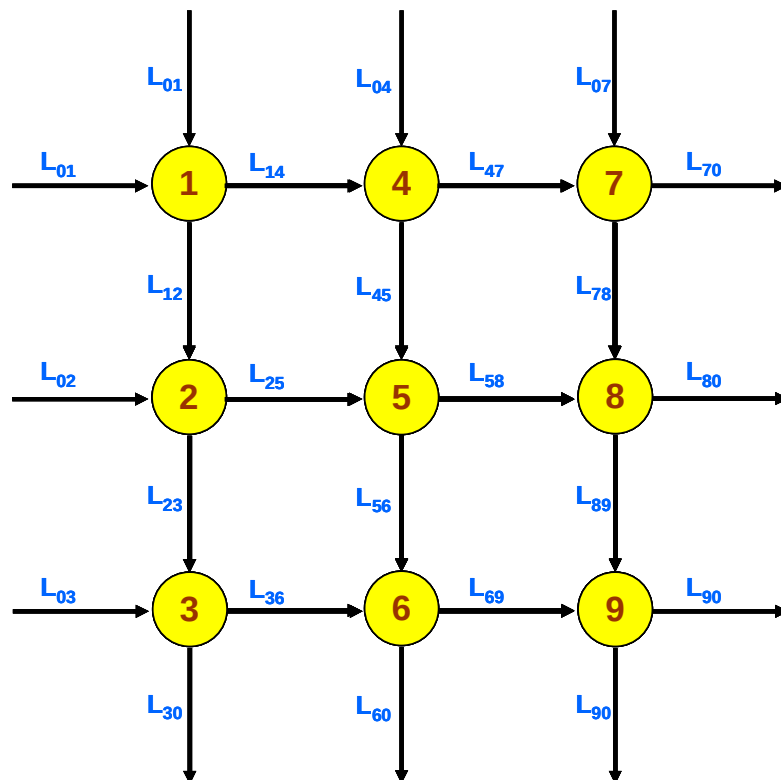


Figura 2.1: sottorete composta da nove nodi

Per semplicità di esposizione poniamoci in una situazione ideale in cui ogni link è unidirezionale ed ha capacità pari a 100 b/sec. Supponiamo inoltre che lungo i vari link viaggino solo pacchetti contenenti dati informativi di dimensione 1 bit, senza considerare la presenza di frame di controllo

utilizzati per la sincronizzazione dei vari host, per trasmettere segnali di acknowledgment, di not-acknowledge etc. Ciò comporta il massimo utilizzo dei link di trasmissione per il trasferimento delle informazioni. Assumiamo, inoltre, che ogni singolo nodo abbia una coda capace di memorizzare una quantità di informazione pari a 10 bit per un totale di 10 pacchetti e che in ingresso alla sottorete considerata arrivi una quantità totale di 100 pacchetti di informazione ogni secondo, per un totale di 100 b/sec, su ogni nodo esterno alla sottorete direttamente connesso alla rete globale. Infine, supponiamo che il carico di informazioni in ingresso ad ogni nodo venga smistato per metà sul primo link di uscita e per la restante metà sul secondo link e che tutti i pacchetti viaggino alla stessa velocità in modo da evitare perdite. E' semplice notare che lo scenario presentato risulta desiderabile in quanto comporta un elevato livello di funzionalità del sistema dal momento che non tiene in considerazione "sprechi" di utilizzo del canale trasmissivo determinati dall'istradamento dei frame di sincronizzazione e coordinamento tra i vari host della rete. L'infrastruttura risulta completamente bilanciata garantendo in questo modo elevate prestazioni. Dalle ipotesi formulate emerge che, a regime, valutando l'evoluzione del sistema in una scala temporale ampia, la rete viene a trovarsi in una situazione di equilibrio diretta conseguenza del carico costante sugli archi nel tempo. L'infrastruttura considerata sarà caratterizzata dal massimo livello di servizio possibile, anch'esso costante nel tempo, dal momento che tutti i pacchetti in ingresso alla sottorete fluiranno ed usciranno dalla stessa senza essere persi né accodati in alcun nodo. Quanto detto è schematizzato di seguito:

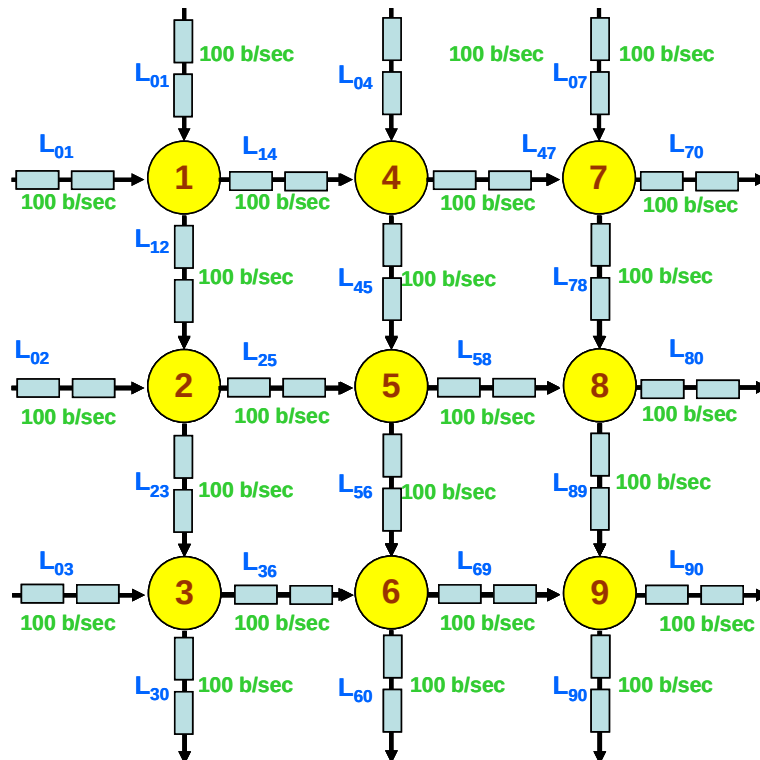


Figura 2.2: Trasmissione di pacchetti

Cosa accade se in un determinato istante di tempo un nodo cade? In particolar modo supponiamo che a cadere sia il nodo 5 come riportato in figura:

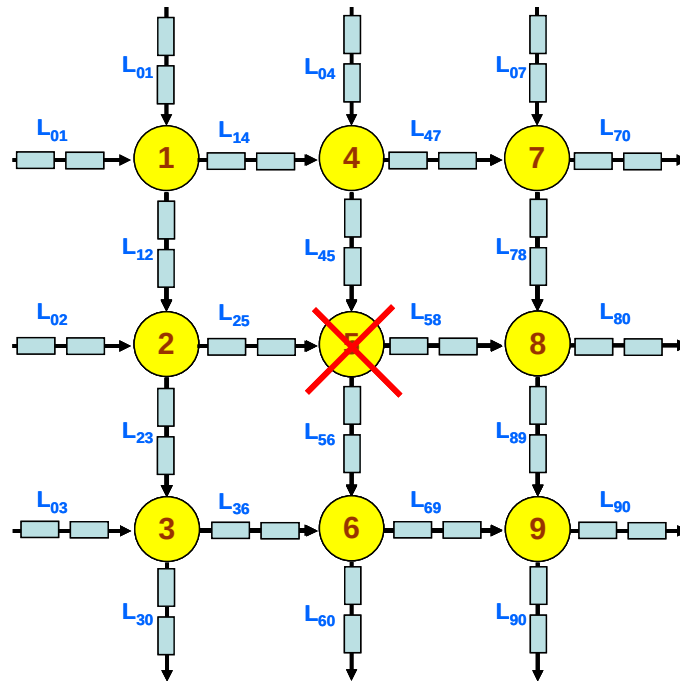


Figura 2.3: Caduta del nodo 5

I nodi direttamente connessi al nodo 5 ovvero il nodo 6 ed il nodo 8 non riceveranno più pacchetti da questo, riducendo pertanto la quantità di informazioni da smistare all'esterno della sottorete (perdita di servizio) come mostrato in figura.

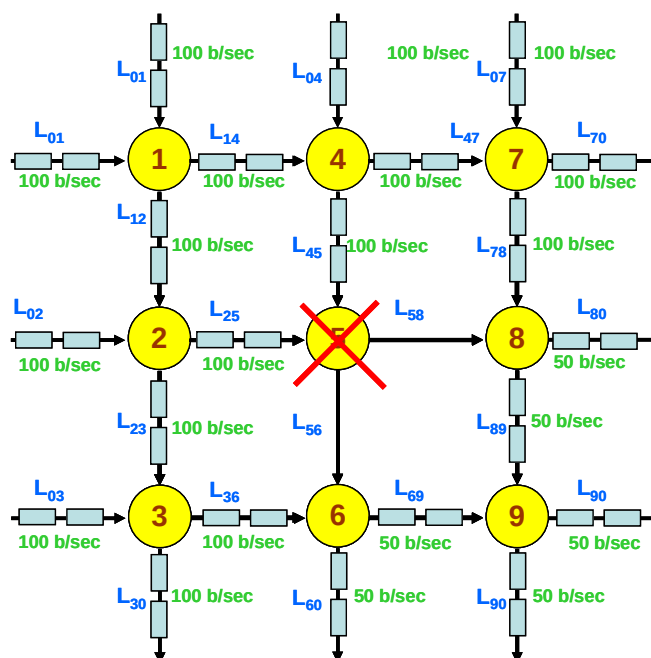


Figura 2.4: I nodi 8 e 6 non ricevono più pacchetti

Viceversa, il nodo 4 ed il nodo 2, non sapendo inizialmente che il nodo 5 è down, continueranno ad inviargli pacchetti in accordo alle proprie tavole di routing. Tali pacchetti verranno ovviamente persi causando un primo rallentamento della rete. Quando il nodo 4, ed il nodo 2 non ricevono più alcun feedback dal nodo 5, nell'arco di un determinato intervallo temporale, capiranno che tale nodo è andato in crash e provvederanno a reinstradare i pacchetti da inviare aggirando il nodo down. Reinstradare i pacchetti equivale ad aggiornare le tabelle di routing non soltanto dei nodi direttamente connessi al nodo 5, ma, eventualmente, di tutti i nodi della sottorete.

Nello scenario considerato, in funzione della topologia della rete e del carico sui vari link, si aggiorneranno le tabelle di routing del nodo 4 e del nodo 2.

Sulla base di tali aggiornamenti riproduciamo come varia il percorso che i pacchetti compiono all'interno della rete considerata, indicando su ogni link il carico di informazioni trasferiti ogni secondo e, conseguentemente, il numero di pacchetti instradati sull'arco.

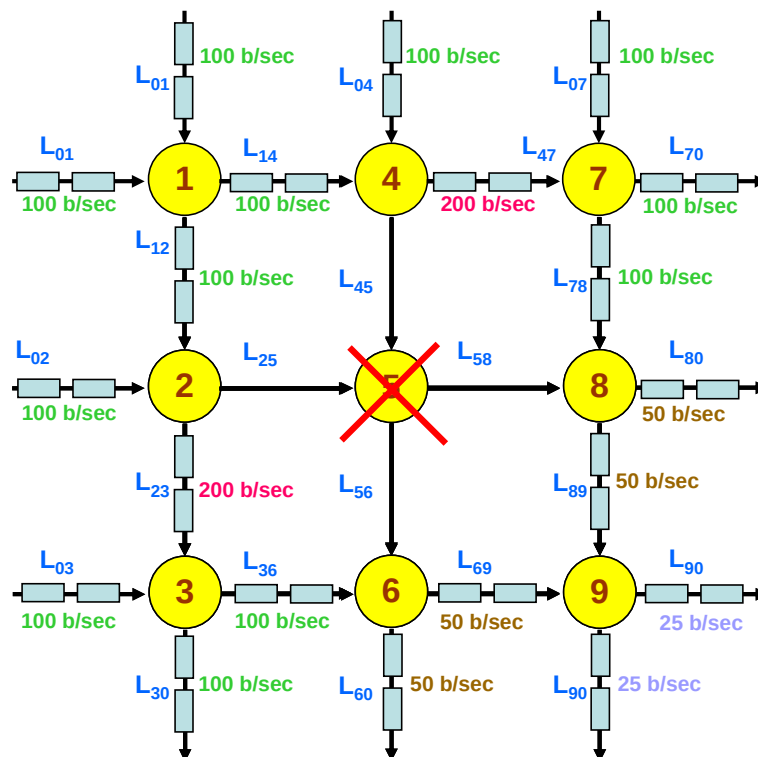


Figura 2.5: Scenario virtuale conseguente alla caduta del nodo 5

Dal momento che la capacità di ogni link è stata fissata a 100 b/sec, è possibile notare come la quantità di informazione inviata dal nodo 4 al nodo 7 e dal nodo 2 al nodo 3 (200 b/sec) non potrà essere interamente trasferita per limitazioni del canale trasmissivo. Pertanto 20 pacchetti saranno memorizzati in coda ai nodi mentre 80 frame saranno persi. Lo scenario descritto è rappresentato nell'immagine che segue:

presenza di nodi down e, fondamentalmente, in presenza di una rete topologicamente differente e qualitativamente inferiore a quella originale. Nel caso di reti con carichi ridotti, le modifiche alle tavole di routing dei nodi up tali da evitare l'interazione con il nodo down può certamente garantire, se non le stesse prestazioni della rete prima del crash dell'host, quantomeno un livello di servizio sufficiente per la consueta evoluzione del sistema. Purtroppo però, come evidenziato in precedenza, in presenza di reti critiche soggette a forti carichi, la sola modifica delle tavole di routing, mantenendo inalterato il flusso di informazioni in ingresso alla rete, può comportare una elevata percentuale di perdita di pacchetti locale ai nodi, con un conseguente aumento delle ritrasmissioni e ritardi nel processamento delle informazioni, situazioni queste che limitano la qualità di servizio della rete ed, in alcuni casi, portano al collasso del sistema.

Nel paragrafo che segue verrà descritto brevemente l'approccio utilizzato per garantire un elevato livello di servizio di reti critiche soggette a forti carichi di informazioni in presenza di guasti, evitando le problematiche incontrate dall'attuale soluzione per la gestione del problema.

3 Metodologia proposta per la risoluzione del problema

Come descritto nel paragrafo precedente la tecnica attualmente utilizzata per la gestione di criticità occorse in determinati nodi di una rete di telecomunicazioni prevede di aggiornare le tavole di routing dei restanti nodi attivi. Tale politica di intervento garantisce buoni risultati in presenza di reti con un basso carico di informazione in circolo lungo di esse.

In presenza di reti critiche, soggette pertanto a forti carichi, la soluzione attualmente in uso causa un eccessivo abbassamento del livello di servizio della rete e, in alcuni casi, determina il crash dell'intero sistema. Le ragioni che portano a questi indesiderabili scenari risiedono nel fatto che, pur in presenza di una rete con caratteristiche topologiche differenti dall'originale soggetta sempre ad elevati carichi, la quantità di informazioni in ingresso alla rete resta inalterata. Per ovvie ragioni il servizio richiesto non potrà essere espletato del tutto, aumentando conseguentemente in maniera esponenziale la perdita di pacchetti e le ritrasmissioni locali a determinati nodi dell'infrastruttura con disagi che riducono notevolmente le prestazioni offerte dal sistema.

L'idea formulata nell'ambito del progetto prevede di evitare tali scenari. Ovvero, osservando reti con un elevato carico di informazioni in circolo lungo di esse, si vuole garantire un buon livello di servizio, difficilmente identico all'originale, che garantisca comunque buone prestazioni del sistema anche in presenza di nodi failure.

L'ideale sarebbe quella di riuscire a garantire delle prestazioni identiche anche in presenza di nodi down. Per ovvie ragioni hardware, topologiche e gestionali ciò non è possibile se si prendono in

considerazione reti soggette ad elevati carichi. Risulta però importante, soprattutto in casi limite come quelli considerati, essere in grado di garantire un livello di servizio tale da ridurre al minimo perdite di pacchetti, ritrasmissioni e crolli nelle prestazioni del sistema.

Analizziamo nel dettaglio la soluzione proposta.

Per ottenere un riscontro immediato con le tecniche in uso per la gestione della problematica esposta, consideriamo nuovamente la sottorete di figura 2.1.

Riprendiamo le stesse ipotesi formulate in precedenza ed analizziamo la qualità del servizio offerto dalla rete in una situazione di equilibrio, proprio come nel caso presentato, ovvero quando il carico di informazione sui vari link si mantiene costante nel tempo come mostrato in figura 2.2.

Si noti che nello scenario considerato, in una situazione di equilibrio, la rete produce un flusso di informazioni in uscita da essa pari a 600 b/sec per un totale di 600 pacchetti.

Supponiamo che in un determinato istante di tempo, anche in questo caso, il nodo 5 fallisca (vedi Fig. 2.3).

Il fallimento di tale nodo comporta che i pacchetti non dovranno più essere trasmessi sui link L_{45} ed L_{25} rispettivamente dal nodo 4 al nodo 5 e dal nodo 2 al nodo 5. Allo stesso modo anche lungo i link L_{58} ed L_{56} non verrà trasmesso alcun frame. Ciò impone al nodo 2 di inviare i pacchetti ricevuti solo ed esclusivamente sul link L_{23} verso il nodo 3, ed al nodo 4 di inviare le informazioni memorizzate solo sul link L_{47} al nodo 7. In accordo al modello realizzato, quanto detto, equivale a settare opportunamente i parametri di distribuzione α dei nodi 2 e 4. In particolare al nodo 2 il parametro di distribuzione sul link L_{23} , α_{23} , sarà impostato ad 1 mentre sul link L_{25} il corrispondente parametro di distribuzione, α_{25} , sarà settato a zero. Operando in questo modo il traffico di informazioni dal nodo 2 si dirigerà interamente lungo il nodo 3 evitando trasmissioni al nodo 5 non attivo. Stesso procedimento sarà ripetuto per il nodo 4. Sul link L_{47} sarà settato il corrispondente parametro di distribuzione, α_{47} , a 1, mentre sul link L_{45} il parametro di distribuzione, α_{45} , che regola la percentuale di traffico da instradare su tale link, verrà posto uguale a 0.

Lo scenario descritto è rappresentato in figura:

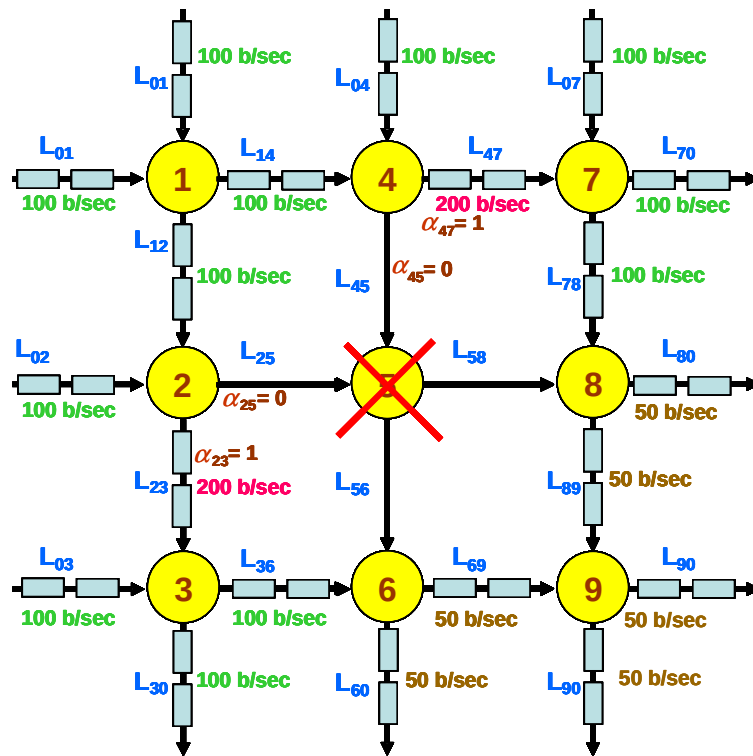


Figura 3.1: coefficienti di distribuzione del modello fluidodinamico

Gli aggiornamenti ai parametri di distribuzione effettuati hanno il solo effetto di evitare l'invio di pacchetti ad un nodo guasto. Infatti, come si evince dalla figura, il problema dell'elevata percentuale di perdita di pacchetti, ritrasmissioni e congestionamenti locali e globali ai nodi non viene ancora risolto.

Al fine di garantire un buon livello di servizio risulta pertanto necessario limitare la quantità di flusso in ingresso alla rete.

Il problema è non banale e scelte sbagliate potrebbero continuare a causare situazioni indesiderate.

In particolar modo consideriamo il seguente scenario:

Supponiamo di ridurre al minimo il flusso in ingresso alla rete. In questo caso saremo certi di eliminare le congestioni, le ritrasmissioni ed i congestionamenti interni alla rete come mostrato di seguito:

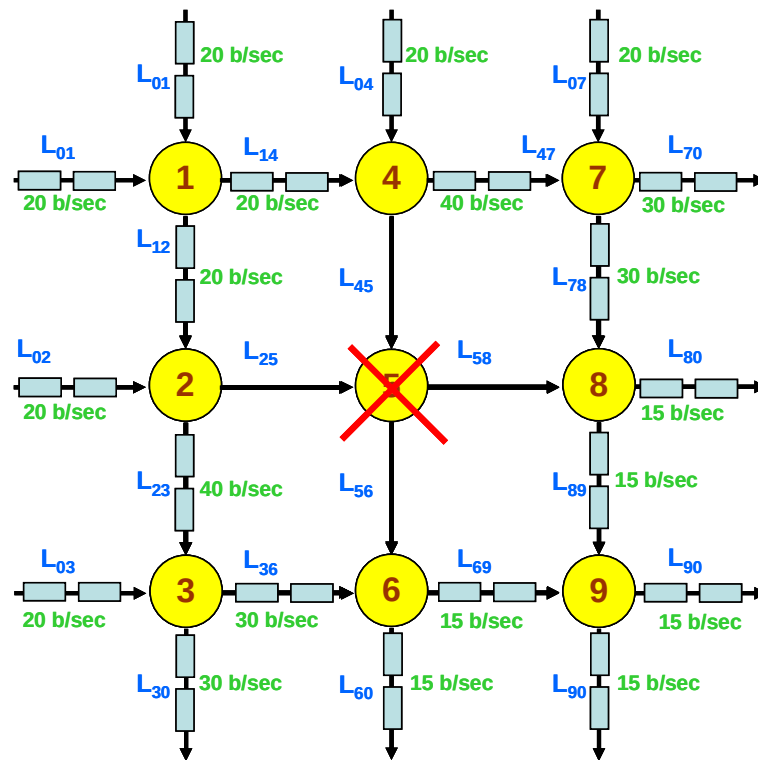


Figura 3.2: riduzione del flusso in ingresso alla rete

Ma è altrettanto vero che il livello di servizio fornito dalla rete risulterà essere troppo basso senza pertanto migliorare in alcun modo i risultati ottenuti utilizzando le attuali tecniche.

Viceversa scegliere un nuovo valore del flusso di ingresso molto vicino all'originale ricondurrebbe alle stesse situazioni presentate nel paragrafo precedente provocando un'elevata percentuale di perdita di pacchetti, forti congestionamenti e ritrasmissioni di frame che causeranno l'appesantimento della rete con una notevole riduzione della qualità di servizi garantita.

Si intuisce pertanto che soltanto una opportuna riconfigurazione del flusso di ingresso alla rete potrà garantire prestazioni del sistema comunque sufficienti a soddisfare l'insieme di servizi richiesti evitando cadute verticali o in alcuni casi veri e propri collassi dell'intera infrastruttura.

4 Equilibri per reti di dati

Nel seguito, considereremo flussi su reti di dati e la risoluzione matematica del problema della caduta dei nodi in una rete. Per una compagnia di servizi, l'analisi delle soluzioni di equilibrio dei flussi su reti di dati in presenza di caduta di nodi è un fattore essenziale per garantire uno standard sufficientemente buono della qualità di servizio, anche nelle emergenze. In altre parole, per il buon funzionamento della rete, la compagnia deve essere in grado di assicurare un certo flusso di uscita (outflow, quantità che arriva all'utente finale) attraverso l'uso di un certo flusso di ingresso (inflow, quantità di informazione iniettata dalle sorgenti). Se cade un nodo, non potendo essere garantito lo

stesso outflow la compagnia assicura la miglior resa possibile nella nuova situazione mediante la determinazione dell'inflow necessario.

L'analisi è basata sul modello fluidodinamico, riportato brevemente nel paragrafo 2 e di cui sarà necessario riprendere alcune definizioni e notazioni.

Nel seguito, si focalizzerà l'attenzione su reti quadrate e i risultati principali ottenuti sono i seguenti:

- Diamo una descrizione esplicita delle soluzioni di equilibrio per le reti di dati, prima e dopo la caduta di un nodo;
- Per le reti di dati, prima e dopo la caduta di un nodo, diamo una mappa assegnando un equilibrio unico per ogni insieme di inflow della rete.
- Dato un desiderato outflow della rete (uno standard per il servizio), descriviamo la variazione dell'inflow in maniera tale da mantenere una qualità di servizio sufficientemente buona, nel caso di caduta di un nodo.

Un equilibrio viene definito come una soluzione, sull'intera rete, che è costante nel tempo. Poiché assumiamo che il flusso f ammetta un unico massimo $\sigma \in [0, \rho_{\max}]$ e che sia nullo ai punti estremi, ovvero $f(0) = f(\rho_{\max}) = 0$, una conseguenza è che esistono shocks a velocità zero, per cui un equilibrio può ben esibire un infinito numero di shocks all'interno di ciascuna linea. Siamo poi interessati ai valori che assumono flusso e densità ai nodi all'equilibrio. I primi sono, infatti, costanti su ogni linea mentre i secondi sono chiamati valori di equilibrio.

Per determinare l'insieme dei valori di equilibrio, consideriamo lo spazio dei valori del flusso come variabili. Si ha un'incognita per ogni linea mentre, per essere in equilibrio, l'insieme delle incognite deve soddisfare una relazione lineare ad ogni nodo. Ad ogni vettore dei valori di equilibrio, corrisponde almeno una soluzione di equilibrio. Poiché siamo interessati a quelle soluzioni, la cui densità è costante lungo ogni linea, per avere questa proprietà, un equilibrio dovrebbe anche rispettare alcune regole ai nodi. Più precisamente, si definiscono valori *bad* e *good* per linee entranti ed uscenti ad un nodo, che dipendono dal fatto che la densità sia più piccola o più grande di σ (il massimo flusso).

Solo alcune combinazioni di valori di *bad* e *good* ai nodi sono possibili. Si focalizzerà per la maggior parte sull'analisi delle soluzioni di equilibrio, con densità costanti lungo le linee, per grafi che danno origine ad un tassellamento regolare e quadrato del piano. Più precisamente, consideriamo la piastrellature della rete Oriented Manhattan.

L'analisi degli equilibri viene fatta nel seguente modo. Dapprima, determiniamo i possibili tipi di equilibrio a ciascun nodo, dipendenti dalla combinazione di valori *good* e *bad* alle linee incidenti. Poi, deduciamo i tipi per reti che hanno $s \times t$ nodi e per le stesse reti quando si ha la caduta di un

nodo. Infine, valutiamo la soluzione di equilibrio in entrambi i casi. In particolare, studiamo la relazione tra inflow (flusso di ingresso) e outflow (flusso di uscita).

4.1 Modellazione di flussi su rete

Una rete è formata da una collezione finita di linee di trasmissione e nodi (routers), ogni pacchetto è visto come una particella sulla rete e si assume che ogni pacchetto viaggi sulla rete con velocità fissata ed assegnata destinazione finale. Inoltre, si assume che i router ricevino, processino, e poi smistino i pacchetti. I pacchetti possono essere persi ma, in questo caso, vengono rispediti dal router. Allora guardiamo ad una scala temporale intermedia ed assumiamo la conservazione dei pacchetti, ricavando un modello composto da una singola legge di conservazione:

$$\rho_t + f(\rho)_x = 0, \quad (4.1)$$

dove ρ è la densità dei pacchetti, v è la velocità e $f(\rho) = v\rho$ è il flusso.

Modelliamo una rete di telecomunicazioni con un insieme finito di intervalli $I_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}, i = 1, \dots, L, a_i < b_i$, e su ciascuno consideriamo l'equazione (4.1). Il dato è rappresentato da un insieme finito di funzioni ρ_i definite su $[0, +\infty[\times I_i$. Assumiamo che le linee di trasmissione siano connesse da alcuni nodi. Ogni nodo J è dato da un numero finito di linee di trasmissione entranti ed un numero finito di linee di trasmissione uscenti, quindi identifichiamo J con $((i_1, \dots, i_m), (j_1, \dots, j_n))$ dove la prima m – tupla indica l'insieme delle linee di trasmissione entranti e la seconda n – tupla l'insieme delle linee di trasmissione uscenti. Ogni linea di trasmissione può essere una linea entrante al più per un nodo ed uscente al più per un nodo. Quindi, il modello completo è definito dalla coppia $(\mathbf{I}, \mathbf{J})$, dove $\mathbf{I} = \{I_i : i = 1, \dots, L\}$ è la collezione delle linee di trasmissione e $\mathbf{J}$ la collezione dei nodi. Indichiamo con N la cardinalità di $\mathbf{J}$.

Per considerare reti complesse, c'è bisogno di un modo per risolvere le dinamiche ai nodi in cui si intersecano le linee. Per questo motivo consideriamo il seguente l'algoritmo di instradamento:

- I pacchetti vengono processati al loro arrivo e spediti sulle linee di uscita per massimizzare i flussi.

Un punto chiave è dato dai problemi di Cauchy con dato iniziale costante su ogni linea di trasmissione, chiamati problemi di Riemann al nodo. Per determinare un'unica soluzione ai problemi di Riemann, vengono introdotti alcuni parametri aggiuntivi, chiamati, rispettivamente,

parametri di priorità e di distribuzione.

Su ogni linea I_i , l'evoluzione è data dall'equazione (1) e si assume che il flusso f sia una funzione strettamente concava (con $f(0) = f(\rho_{\max}) = 0$), quindi esiste un unico $\sigma \in [0, \rho_{\max}]$ tale che $f'(\sigma) = 0$ e che è il massimo di f su $[0, \rho_{\max}]$. Per semplicità di notazione, assumiamo, senza ledere la generalità, che $\rho_{\max} = 1$.

Definizione. Sia $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la mappa tale che $f(\rho) = f(\tau(\rho))$ e $\tau(\rho) \neq \rho$ se $\rho \neq \sigma$.

Per una rete semplice formata da un unico nodo avente m linee entranti ed n linee uscenti, una volta assegnate le quantità di pacchetti che fluiscono dai nodi iniziali ai nodi finali, l'equilibrio finale è funzione dei parametri di distribuzione del traffico e di priorità. Abbiamo solo m parametri di priorità $p \in]0, 1[$ e n parametri di distribuzione del traffico $\alpha \in]0, 1[$. Indichiamo con $\rho_\varphi(t, x)$, $\varphi = 1, \dots, m$, e $\rho_\psi(t, x)$, $\psi = m+1, \dots, m+n$, le densità di traffico, rispettivamente, sulle linee di trasmissione entranti e su quelle uscenti e con $(\rho_{\varphi,0}, \rho_{\psi,0})$ il dato iniziale. Dal momento che la velocità delle onde deve essere negativa sulle linee entranti e positiva su quelle uscenti, vogliamo determinare un'unica $(m+n)$ -tupla $(\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_{m+n}) \in [0, 1]^{m+n}$ tale che:

$$\hat{\rho}_\varphi \in \begin{cases} \{\rho_{\varphi,0}\} \cup]\tau(\rho_{\varphi,0}), 1], & \text{se } 0 \leq \rho_{\varphi,0} < \sigma, \\ [\sigma, 1], & \text{se } \sigma \leq \rho_{\varphi,0} \leq 1, \end{cases} \quad \varphi = 1, \dots, m, \text{ e} \quad (4.2)$$

$$\hat{\rho}_\psi \in \begin{cases} [0, \sigma], & \text{se } 0 \leq \rho_{\psi,0} \leq \sigma, \\ \{\rho_{\psi,0}\} \cup [0, \tau(\rho_{\psi,0})[, & \text{se } \sigma < \rho_{\psi,0} \leq 1, \end{cases} \quad \psi = m+1, \dots, m+n, \quad (4.3)$$

e su ogni linea entrante I_φ , $\varphi = 1, \dots, m$, la soluzione consiste della singola onda $(\rho_{\varphi,0}, \hat{\rho}_\varphi)$, mentre sulla linea uscente I_ψ , $\psi = m+1, \dots, m+n$, la soluzione consiste della singola onda $(\hat{\rho}_\psi, \rho_{\psi,0})$.

Si definiscono $\gamma_\varphi^{\max}$ e $\gamma_\psi^{\max}$ come segue:

$$\gamma_\varphi^{\max} = \begin{cases} f(\rho_{\varphi,0}), & \text{se } \rho_{\varphi,0} \in [0, \sigma[, \\ f(\sigma), & \text{se } \rho_{\varphi,0} \in [\sigma, 1], \end{cases} \quad \varphi = 1, \dots, m, \quad (4.4)$$

e

$$\gamma_\psi^{\max} = \begin{cases} f(\sigma), & \text{se } \rho_{\psi,0} \in [0, \sigma], \\ f(\rho_{\psi,0}), & \text{se } \rho_{\psi,0} \in]\sigma, 1], \end{cases} \quad \psi = m+1, \dots, m+n. \quad (4.5)$$

Le quantità $\gamma_\varphi^{\max}$ e $\gamma_\psi^{\max}$ rappresentano il massimo flusso che può essere ottenuto da una singola onda soluzione su ogni linea di trasmissione. Per massimizzare il numero di pacchetti attraverso un nodo su linee di trasmissione entranti ed uscenti, definiamo:

$$\Gamma = \min\{\Gamma_{in}, \Gamma_{out}\},$$

dove $\Gamma_{in} = \sum_{\varphi=1}^m \gamma_{\varphi}^{\max}$ e $\Gamma_{out} = \sum_{\psi=m+1}^{m+n} \gamma_{\psi}^{\max}$. si può facilmente vedere che, per risolvere il problema di Riemann, è sufficiente determinare i flussi $\hat{\gamma}_{\varphi} = f(\hat{\rho}_{\varphi}), \varphi=1, \dots, m$, e $\hat{\gamma}_{\psi} = f(\hat{\rho}_{\psi}), \psi=m+1, \dots, m+n$. Determiniamo $\hat{\gamma}_{\varphi}, \varphi=1, \dots, m$. Bisogna distinguere due casi:

- $\Gamma_{in} = \Gamma$,
- $\Gamma_{in} > \Gamma$.

Nel primo caso, poniamo $\hat{\gamma}_{\varphi} = \gamma_{\varphi}^{\max}, \varphi=1, \dots, m$. Analizziamo il secondo caso, in cui usiamo i parametri di priorità $p_1, \dots, p_m$, dove $0 < p_{\varphi} < 1$ e $\sum_{\varphi=1}^m p_{\varphi} = 1$. Non tutti i pacchetti possono entrare nel nodo, quindi sia C la quantità di pacchetti che può farlo. Allora, $p_{\varphi}C$ pacchetti provengono dalla linea entrante φ . Si consideri lo spazio $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ e si indichi con P il punto di coordinate $\gamma_{\varphi} = p_{\varphi}\Gamma$. Ora, i flussi finali dovrebbero appartenere alla regione:

$$\Omega = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_m) : 0 \leq \gamma_{\varphi} \leq \gamma_{\varphi}^{\max}, \varphi=1, \dots, m\}.$$

Distinguiamo due casi:

- P appartiene a Ω ;
- P non appartiene a Ω .

Nel primo caso, poniamo $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_m) = P$, mentre nel secondo caso poniamo $(\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_m) = Q$, dove $Q = \text{proj}(P)$, essendo proj una qualche proiezione su Ω . La proiezione più naturale da considerare è quella su un set convesso ([20]).

Determiniamo ora $\hat{\gamma}_{\psi}, \psi=m+1, \dots, m+n$. Come per le linee di trasmissioni entranti, bisogna distinguere due casi:

- $\Gamma_{out} = \Gamma$,
- $\Gamma_{out} > \Gamma$.

Nel primo caso, $\hat{\gamma}_{\psi} = \gamma_{\psi}^{\max}, \psi=m+1, \dots, m+n$. Determiniamo $\hat{\gamma}_{\psi}$ nel secondo caso, in cui usiamo i parametri di distribuzione del traffico $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{m+n}$, dove $\alpha_{\psi} \in]0, 1[$ e $\sum_{\psi=m+1}^n \alpha_{\psi} = 1$. Dal momento che non tutti i pacchetti possono andare sulle linee di trasmissione uscenti, sia C la quantità di pacchetti che può farlo. Allora, $\alpha_{\psi}C$ pacchetti possono andare sulla linea uscente I_{ψ} . Si consideri

lo spazio $(\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_{m+n})$ e si indichi con P il punto di coordinate $\gamma_\psi = \alpha_\psi \Gamma$. I flussi finali appartengono alla regione:

$$\Omega = \{(\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_{m+n}) : 0 \leq \gamma_\psi \leq \gamma_\psi^{\max}, \psi = m+1, \dots, m+n\}.$$

Distinguiamo due casi:

- P appartiene a Ω ;
- P non appartiene a Ω .

Nel primo caso, poniamo $(\hat{\gamma}_{m+1}, \dots, \hat{\gamma}_{m+n}) = P$, mentre nel secondo caso poniamo $(\hat{\gamma}_{m+1}, \dots, \hat{\gamma}_{m+n}) = Q$, dove $Q = \text{proj}(P)$.

La soluzione del problema di Riemann, $((\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_m), (\hat{\rho}_{m+1}, \dots, \hat{\rho}_{m+n}))$, viene valutata a partire dai flussi di equilibrio $((\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_m), (\hat{\gamma}_{m+1}, \dots, \hat{\gamma}_{m+n}))$, considerando l'unica soluzione delle equazioni $\hat{\gamma}_\varphi = f(\hat{\rho}_\varphi)$, $\varphi = 1, \dots, m$ e $\hat{\gamma}_\psi = f(\hat{\rho}_\psi)$, $\psi = m+1, \dots, m+n$ tale che le condizioni (4.2) e (4.3) siano soddisfatte.

Definizione. Una componente della soluzione ad un nodo, $\hat{\rho}_\varphi$, $\varphi = 1, \dots, m$, è:

- Bad se $\hat{\rho}_\varphi \in [0, \sigma[$;
- Good se $\hat{\rho}_\varphi \in [\sigma, 1]$,

e una componente della soluzione, $\hat{\rho}_\psi$, $\psi = m+1, \dots, m+n$, è:

- Bad se $\hat{\rho}_\psi \in]\sigma, 1]$;
- Good se $\hat{\rho}_\psi \in [0, \sigma]$.

Osservazione. Osserviamo che se esiste un indice $\bar{\varphi}$ per il quale $\hat{\rho}_{\bar{\varphi}}$ è good, allora, per tutti gli $\psi = m+1, \dots, m+n$, deve risultare bad $\hat{\rho}_\psi$. Si noti che $\hat{\rho}_{\bar{\varphi}}$ good significa che $\Gamma_{in} > \Gamma = \Gamma_{out}$ e $\hat{\gamma}_{\bar{\varphi}} < \gamma_{\bar{\varphi}}^{\max}$. Quindi, per ogni ψ , $\hat{\gamma}_\psi = \gamma_\psi^{\max}$ e $\hat{\rho}_\psi$ è bad. Vale anche il viceversa: se esiste un indice $\bar{\psi}$ tale che $\hat{\rho}_{\bar{\psi}}$ è good, allora, per tutti i $\varphi = 1, \dots, m$, deve essere $\hat{\rho}_\varphi$ bad.

Siamo ora interessati alle soluzioni sull'intera rete $(\mathbf{I}, \mathbf{J})$, non solo alle soluzioni sui singoli nodi.

Più precisamente, siamo interessati alle soluzioni di equilibrio.

Definizione. Un'equilibrio è una soluzione $\rho(t, x) = (\rho_1, \dots, \rho_L)$ (si ricordi che L indica la cardinalità di $\mathbf{I}$), costante nel tempo. Assumiamo anche che $\rho(t, \cdot)$ sia BV, così possiamo definire, per ogni $i = 1, \dots, L$, i valori $\rho_i^- = \lim_{x \rightarrow a_i} \rho(t, x)$ e $\rho_i^+ = \lim_{x \rightarrow b_i} \rho(t, x)$. Dal momento che ρ è una soluzione, allora:

$$\sum_{\varphi=1}^m f(\rho_{j_\varphi}) = \sum_{\psi=m+1}^{m+n} f(\rho_{j_\psi}), \quad (4.6)$$

è soddisfatta ad ogni nodo $J_j \in \mathbf{J}$, $j=1, \dots, N$. In (4.6), abbiamo indicato con $\rho_{j_1}, \dots, \rho_{j_m}, \rho_{j_{m+1}}, \dots, \rho_{j_{m+n}}$ le densità lungo le m linee entranti $I_{j_1}, \dots, I_{j_m}$ e le n linee uscenti $I_{j_{m+1}}, \dots, I_{j_{m+n}}$ al nodo J_j .

Distinguiamo due casi:

- i. esiste un $i=1, \dots, L$, tale che $\rho_i^- \neq \rho_i^+$. In questo caso, $\rho_i^+ = \tau(\rho_i^-)$ e i flussi $\gamma_i = f(\rho_i^\pm)$ risultano essere costanti nel tempo e lungo la linea I_i ;
- ii. per tutti gli $i=1, \dots, L$, $\rho_i^+ = \rho_i^-$ e chiamiamo tale valore ρ_i .

Definizione. Sia $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_L)$ un equilibrio per la rete $(\mathbf{I}, \mathbf{J})$, che soddisfa la ii. Assumiamo che i valori dell'equilibrio siano $\rho_1, \dots, \rho_L$. Inoltre, se ρ_i è di tipo τ_i , con $\tau_i \in \{bad, good\}$, allora diciamo che $T = (\tau_1, \dots, \tau_L)$ è il tipo di equilibrio.

4.2 Notazioni e risultati standard

Indichiamo con $I(n)$ la matrice identità di ordine n , con $L(n)$ la sotto – matrice diagonale di ordine n :

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

con $I(n)^{odd}$ la matrice sparsa con

$$\begin{cases} (I(n)^{odd})_{ii} = 1 & \text{se } i \text{ è dispari,} \\ (I(n)^{odd})_{ii} = 0 & \text{se } i \text{ è pari,} \\ (I(n)^{odd})_{ij} = 1 & \text{per } i \neq j, \end{cases}$$

con $I(n)^{even} = I(n) - I(n)^{odd}$ e con A^T la trasposta della matrice A .

4.2.1 La funzione segno delle matrici

La funzione segno di una matrice A di tipo $n \times n$ può essere definite come:

$$\text{sign}(A) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} (zI(n) - A)^{-1} dz - I(n),$$

dove γ è una curva semplice chiusa nel piano complesso che racchiude tutti gli autovalori di A con parte reale positive. Un metodo semplice per valutare $\text{sign}(A)$ è prendere la decomposizione canonica di Jordan $A = RJR^{-1}$, indicare con D la parte diagonale di J , $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, e con $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$ la matrice diagonale i cui ingressi s_i sono i segni delle parti reali di d_i , $\Re(d_i)$, ovvero

$$\begin{cases} s_i = 1 & \text{se } \Re(d_i) > 0 \\ s_i = -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, $\text{sign}(A) = RSR^{-1}$. Chiaramente, per una matrice stabile A , dal momento che tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, otteniamo $S = -I(n)$ e $\text{sign}(A) = -RI(n)R^{-1} = -I(n)$.

Un altro metodo per la valutazione del $\text{sign}(A)$ è l'iterazione di Newton: se A non possiede autovalori puramente immaginari, allora $\text{sgn}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$, dove

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}). \end{cases}$$

4.2.2 I prodotti di Kronecker di matrici

Il prodotto di Kronecker, indicato con $\otimes$, è un'operazione che si effettua su due matrici di arbitraria dimensionalità, dando luogo ad una matrice a blocchi. Se A è una matrice $m \times n$ e B è una matrice $p \times q$, allora il prodotto di Kronecker $A \otimes B$ è la matrice a blocchi $mp \times nq$:

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Il prodotto di Kronecker è bilineare e associativo. Inoltre, l'operazione di trasposizione è distributiva sul prodotto di Kronecker.

La vettorizzazione di una matrice A si ottiene mettendo una sotto l'altra le colonne di A in un singolo vettore colonna indicato da $\text{vec}(A)$.

4.2.3 Equazione matriciale

L'equazione matriciale $AXB = C$ può essere convenientemente rappresentata mediante il prodotto

di Kronecker.

$$(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(AXB) = \text{vec}(C).$$

Si può risolvere un'equazione matriciale trasformandola in un sistema di equazioni lineari.

4.2.4 Equazioni di Sylvester

Un particolare caso di equazioni matriciali è l'equazione di Sylvester, che è un'equazione matriciale del tipo:

$$AX + XB + C = 0, \quad (4.7)$$

dove $A \in R^{s \times s}$, $B \in R^{t \times t}$, $C, X \in R^{s \times t}$. X rappresenta la soluzione. La matrice quadrata di ordine $(s+t) \times (s+t)$

$$H = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{bmatrix}$$

viene diagonalizzata mediante la trasformazione di similitudine indotta da

$$Q = \begin{bmatrix} I(s) & X \\ 0 & -I(t) \end{bmatrix}.$$

Quindi,

$$Q^{-1}HQ = H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}.$$

Usando la funzione segno di H e la relazione di diagonalizzazione precedente, deriviamo la seguente espressione per la soluzione X dell'equazione (4.7):

$$\frac{1}{2}(\text{sign}(H) + I(s+t)) = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & I(t) \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Mediante l'iterazione di Newton di H , otteniamo:

$$\begin{cases} H_0 = H \\ H_k = \begin{bmatrix} A_k & C_k \\ 0 & -B_k \end{bmatrix} \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_{k+1} &= \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}) \\ B_0 &= B, & B_{k+1} &= \frac{1}{2}(B_k + B_k^{-1}) \\ C_0 &= C, & C_{k+1} &= \frac{1}{2}(C_k + A_k^{-1}C_k B_k^{-1}). \end{aligned}$$

Inoltre, se A e B sono matrici stabili, otteniamo:

$$\text{sign}(H) = \begin{bmatrix} -I(s) & C_{\infty} \\ 0 & I(t) \end{bmatrix}$$

e, infine, dall'equazione (4.8), la soluzione:

$$X = \frac{1}{2}C_{\infty}.$$

4.3 Reti del tipo Manhattan

Ricordiamo che una rete non è altro che è un grafo orientato. Nel seguito, tratteremo il caso di reti quadrate ed in particolare reti del tipo Oriented Manhattan. L'immagine che segue mostra un tipico esempio di rete appartenente a tale tipologia di network:

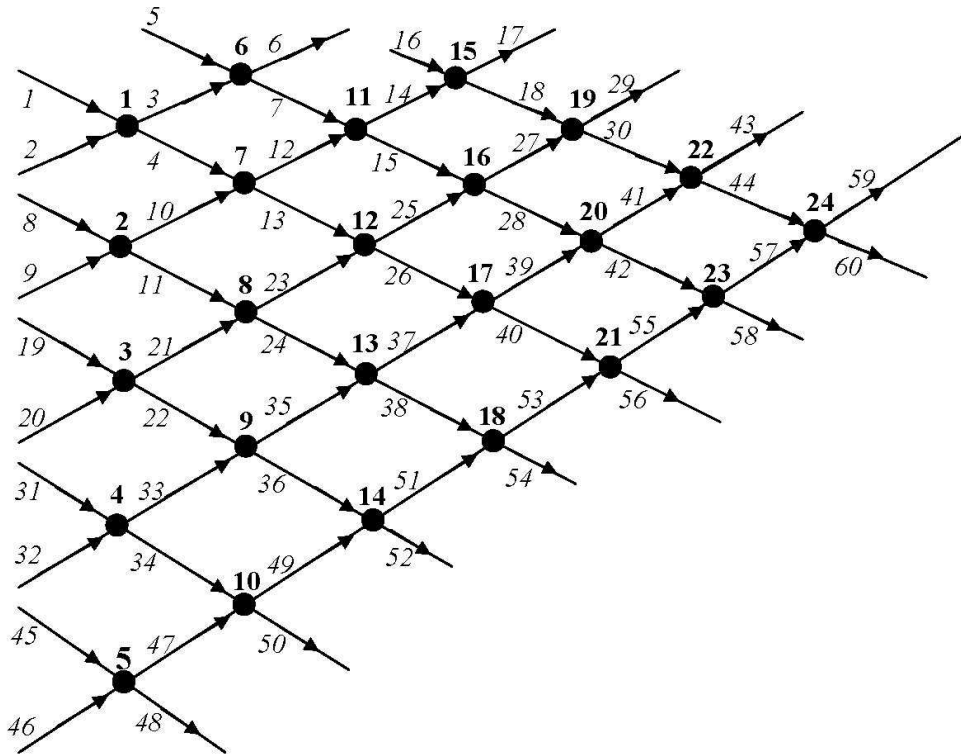


Fig. 4.1: esempio di rete Oriented Manhattan

Più precisamente, consideriamo una rete quadrata composta da $s \times t$. Grazie alla regolarità delle reti che stiamo considerando, i nodi dell'intera rete possono essere vista come se fossero i nodi di una struttura piastrellata quadrata e possono essere numerati in forma matriciale, $J_{11}, \dots, J_{1t}, \dots, J_{s1}, \dots, J_{st}$. Inoltre, per le reti di tipo Oriented Manhattan abbiamo due linee entranti e due linee uscenti. La cardinalità di $\mathbf{J}$ è $N = s \times t$ e la cardinalità di $\mathbf{I}$ è $L = 4 \times s \times t$.

Vale la seguente proposizione (vedi [19])

Proposizione. *Si considerino reti $(\mathbf{I}, \mathbf{J})$ con $N = s \times t$ cardinalità di $\mathbf{J}$ e $L = 4 \times s \times t$ cardinalità $\mathbf{I}$. L'insieme dei valori di equilibrio è un sottospazio di $R^{4 \times s \times t}$ di dimensione $L - N = 3 \times s \times t$.*

La proposizione precedente afferma che, all'equilibrio, su ogni linea $I \in \mathbf{I}$ c'è un flusso tra due nodi adiacenti che è costante nel tempo e lungo la linea I (L variabili) con il vincolo (4.6) che ad ogni nodo J il flusso totale entrante dalle linee entranti deve essere uguale al flusso totale uscente dalle linee uscenti (per un totale di N vincoli).

Il risultato è basato solo sulle proprietà topologiche della rete. Vedremo poi che il tipo di equilibrio impone più vincoli sull'insieme dei valori di equilibrio dando così una stima più precisa delle sue dimensioni.

A questo scopo, consideriamo un equilibrio ad un nodo di una matrice quadrata, e indichiamo ogni componente come di tipo good o di tipo bad. L'equilibrio ad un nodo J è o un vettore $2+2$ o un vettore 4×4 .

I possibili tipi di equilibrio ad un nodo sono i seguenti (usiamo la notazione compatta b per *bad* e g per *good*) per la rete Oriented Manhattan:

- $I : ((b, b, b, b), (b, b, b, b)) ;$
- $II0 : ((b, b, b, b), (g, g, g, g)) ;$
- $III1.1 : ((b, b, b, b), (b, g, g, g)) ;$
- $III1.2 : ((b, b, b, b), (g, b, g, g)) ;$
- $III1.3 : ((b, b, b, b), (g, g, b, g)) ;$
- $III1.4 : ((b, b, b, b), (g, g, g, b)) ;$
- $II2.1.2 : ((b, b, b, b), (b, b, g, g)) ;$
- $II2.1.3 : ((b, b, b, b), (b, g, b, g)) ;$
- $II2.1.4 : ((b, b, b, b), (b, g, g, b)) ;$
- $II2.2.3 : ((b, b, b, b), (g, b, b, g)) ;$
- $II2.2.4 : ((b, b, b, b), (g, b, g, b)) ;$
- $II2.3.4 : ((b, b, b, b), (g, g, b, b)) ;$
- $III3.1.2.3 : ((b, b, b, b), (b, b, b, g)) ;$
- $III3.1.2.4 : ((b, b, b, b), (b, b, g, b)) ;$
- $III3.1.3.4 : ((b, b, b, b), (b, g, b, b)) ;$

- $II3.2.3.4: ((b, b, b, b), (g, b, b, b));$
- $III0: ((g, g, g, g), (b, b, b, b));$
- $III1.1: ((b, g, g, g), (b, b, b, b));$
- $III1.2: ((g, b, g, g), (b, b, b, b));$
- $III1.3: ((g, g, b, g), (b, b, b, b));$
- $III1.4: ((g, g, g, b), (b, b, b, b));$
- $III2.1.2: ((b, b, g, g), (b, b, b, b));$
- $III2.1.3: ((b, g, b, g), (b, b, b, b));$
- $III2.1.4: ((b, g, g, b), (b, b, b, b));$
- $III2.2.3: ((g, b, b, g), (b, b, b, b));$
- $III2.2.4: ((g, b, g, b), (b, b, b, b));$
- $III2.3.4: ((g, g, b, b), (b, b, b, b));$
- $III3.1.2.3: ((b, b, b, g), (b, b, b, b));$
- $III3.1.2.4: ((b, b, g, b), (b, b, b, b));$
- $III3.1.3.4: ((b, g, b, b), (b, b, b, b));$
- $III3.2.3.4: ((g, b, b, b), (b, b, b, b)).$

Definizione. Indichiamo con

$$\mathbf{M} = \{I, II0, II1.h, \dots, II(n-1).h_1 \cdots h_{n-1}, III0, III1.h, \dots, III(m-1).h_1 \cdots h_{m-1}\}$$

l'insieme di tutti i possibili tipi di equilibrio ad un nodo, dove $n = 2$ oppure $n = 4$.

Definizione. Indichiamo con :

$$\widehat{\mathbf{N}} = \{(j_{ij}, j_{ij} \in \mathbf{M}, i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t) = \mathbf{M}^{s \times t},$$

l'insieme di tutti i possibili tipi di equilibrio sull'intera rete.

Ovviamente, la cardinalità di $\widehat{\mathbf{N}}$ è M^N . Comunque, come sarà più chiaro nel seguito, non è necessario studiare tutti gli elementi di $\widehat{\mathbf{N}}$.

Infatti, dalla definizione di equilibrio, possono essere considerati due tipi di equilibri sull'intera rete. Nel caso *ii*, deve essere soddisfatta la seguente regola di compatibilità:

- (H) Se una linea I_i è entrante per un qualche nodo J_1 ed uscente per qualche altro nodo J_2 , allora se $\hat{\rho}_i$ è di tipo bad per J_1 , allora deve essere di tipo good per J_2 e viceversa.

La regola **H** dà una relazione di compatibilità tra equilibri in nodi adiacenti. Tale relazione di compatibilità a sua volta determina il sottoinsieme $\mathbf{N} \subset \widehat{\mathbf{N}}$ di stati di equilibrio ammissibile per

l'intera rete. Questo fatto non sussiste per il caso i . Infatti, un'onda di shock lungo la linea I_i può trasformare la densità $\hat{\rho}_i$ in $\tau(\hat{\rho}_i)$ e mantenere costante il flusso $\hat{\gamma}_i$. Quindi, $\hat{\rho}_i$ di tipo good o bad come linea entrante per J_1 non influenza il tipo di $\hat{\rho}_i$ come densità uscente per J_2 . Non si può dedurre alcuna relazione di compatibilità tra nodi adiacenti e quindi l'insieme dei possibili stati di equilibrio per l'intera rete è $\mathbf{N} = \widehat{\mathbf{N}}$. Vale dunque la seguente proposizione:

Proposizione. Se si considerano gli equilibri i , allora $\mathbf{N} = \widehat{\mathbf{N}}$. Se, altrimenti, si considerano gli equilibri ii , allora $\mathbf{N} \subsetneq \widehat{\mathbf{N}}$.

Nel seguito, si considereranno gli equilibri ii , e si darà una caratterizzazione di $\mathbf{N}$.

Vogliamo ora capire quali sono i vincoli aggiuntivi imposti dal tipo di equilibrio ad un nodo.

Proposizione. Si assuma preliminarmente che il nodo J sia di tipo $II0$. Allora, $\gamma_\phi = \gamma_\phi^{\max}, \phi = 1, \dots, n$, e $(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{2n}) = P$ dove $P = (\alpha_1 \Gamma_{in}, \dots, \alpha_n \Gamma_{in})$.

Se il nodo J è di tipo $IIv.h_1.h_2 \dots h_v$, allora $\gamma_\phi = \gamma_\phi^{\max}, \phi = 1, \dots, n$, $\gamma_\psi = \gamma_\psi^{\max}$ per tutti gli $\psi = h_1, \dots, h_v$ e $(\gamma_{n+1}, \dots, \gamma_{2n}) = \text{proj}(P)$ dove $P = (\alpha_1 \Gamma_{in}, \dots, \alpha_n \Gamma_{in})$.

Se il nodo J è di tipo $III0$, allora $\gamma_\psi = \gamma_\psi^{\max}, \psi = n+1, \dots, 2n$, e $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = P$, dove $P = (p_1 \Gamma_{out}, \dots, p_n \Gamma_{out})$.

Se, infine, il nodo J è di tipo $IIIv.h_1.h_2 \dots h_v$, allora $\gamma_\psi = \gamma_\psi^{\max}, \psi = n+1, \dots, 2n$, $\gamma_\phi = \gamma_\phi^{\max}$ per tutti gli $\phi = h_1, \dots, h_v$ e $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \text{proj}(P)$ dove $P = (p_1 \Gamma_{out}, \dots, p_n \Gamma_{out})$.

In particolare, se $n = 2$, abbiamo:

per il nodo $II1.1$; $\gamma_\phi = \gamma_\phi^{\max}, \phi = 1, 2$, $\gamma_3 = \gamma_3^{\max}$,
 $\gamma_4 = \Gamma - \gamma_3$,

per il nodo $II1.2$; $\gamma_\phi = \gamma_\phi^{\max}, \phi = 1, 2$, $\gamma_4 = \gamma_4^{\max}$,
 $\gamma_3 = \Gamma - \gamma_4$,

per il nodo $II0$; $\gamma_\phi = \gamma_\phi^{\max}, \phi = 1, 2$, $\gamma_3 = \gamma_3^{\max}$,
 $\gamma_4 = \alpha \gamma_3$,

per il nodo $III1.1$; $\gamma_\psi = \gamma_\psi^{\max}, \psi = 3, 4$, $\gamma_1 = \gamma_1^{\max}$,
 $\gamma_2 = \Gamma - \gamma_1$,

per il nodo $III1.2$; $\gamma_\psi = \gamma_\psi^{\max}, \psi = 3, 4, \gamma_2 = \gamma_2^{\max},$
 $\gamma_1 = \Gamma - \gamma_2,$

per il nodo $III0$; $\gamma_\psi = \gamma_\psi^{\max}, \phi = 3, 4, \gamma_1 = \gamma_1^{\max},$
 $\gamma_2 = p\gamma_2,$

4.4 Oriented Manhattan

4.4.1 Soluzioni quantitative per la rete senza buchi

Seguendo la regola (**H**), otteniamo le seguenti proposizioni.

Proposizione. Se il nodo J_{11} è del tipo $I, III0, III1, III2$, allora la rete è descritta dalla seguente tabella:

$I, III0, III1, III2$	$III0, III2$	$III0, III2$	...
$III0, III1$	$III0$	$III0$	...
$III0, III1$	$III0$	$III0$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Proposizione. Se il nodo J_{st} è di tipo $I, II0, II1, II2$, allora la rete è descritta dalla seguente tabella:

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\dots$	$II0$	$II0$	$II0, II1$
$\dots$	$II0$	$II0$	$II0, II1$
$\dots$	$II0, II2$	$II0, II2$	$I, II0, II1, II2$

Proposizione. Sia J_{ij} un nodo di tipo I . Allora,

- tutti i nodi J_{il} , $l = j+1, \dots, t$ sono o di tipo $III0$ o di tipo $III2$,
- tutti i nodi J_{il} , $l = 1, \dots, j-1$ sono o di tipo $II0$ o di tipo $II2$,
- tutti i nodi J_{kj} , $k = i+1, \dots, s$ sono o di tipo $III0$ o di tipo $III1$,
- tutti i nodi J_{kj} , $k = 1, \dots, i-1$ sono o di tipo $II0$ o di tipo $II1$.

Corollario. Sia J_{ij} un nodo di tipo I . Allora,

- tutti i nodi J_{kl} , con $k = 1, \dots, j-1$ e $l = 1, \dots, i-1$ sono di tipo $II0$;
- tutti i nodi J_{kl} , con $k = j+1, \dots, t$ e $l = i+1, \dots, s$ sono di tipo $III0$;
- se esiste J_{kl} di tipo I deve necessariamente essere sia $k > i, l > j$ sia $k < i, l < j$.

Corollario. Il numero di nodi di tipo I in una rete $s \times t$ è al più $\min(s, t)$, il minimo tra s e t .

Dalle proposizioni precedenti e dal corollario, segue il teorema:

Teorema. Una rete $A_{s \times t}$ viene descritta da $4s \times t$ parametri.

$incoming_{ij}^h, incoming_{ij}^v, outgoing_{ij}^h, outgoing_{ij}^v$, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, t$, insieme a $4s \times t - s - t - \omega$ vincoli, dove $\omega \leq \min(s, t)$ è il numero di nodi di tipo I .

Nel resto di questa sezione, considereremo solo nodi di tipo $II0$ o $III0$.

4.4.2 Soluzione esatta senza buchi

Per una rete $s \times t$, abbiamo le seguenti variabili di flusso: $incomin g_{ij}^h$, $incomin g_{ij}^v$, $outgoing_{ij}^h$, $outgoing_{ij}^v$, con $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, t$, per un totale di $4 \times s \times t$.

Per una rete con tutti nodi di tipo $II0$, abbiamo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} incoming_{ij}^h &= outgoing_{ij-1}^h, \\ incoming_{ij}^v &= outgoing_{i-1j}^v \end{aligned}$$

per tutti gli $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, t$, dove

$$\left[outgoing(0,1), outgoing(0,2), \dots, outgoing(0,t) \right] = \frac{x^h}{\alpha} \in R^t,$$

e

$$\left[outgoing(1,0), outgoing(2,0), \dots, outgoing(s,0) \right] = x^v \in R^s,$$

sono i vettori dei flussi di ingresso.

Inoltre, abbiamo che le equazioni

$$incoming_{ij}^h + incoming_{ij}^v = outgoing_{ij}^h + outgoing_{ij}^v, \quad (4.9 \text{ a})$$

e

$$outgoing_{ij}^v = \alpha outgoing_{ij}^v, \quad (4.9 \text{ b})$$

sono valide per tutti gli $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, t$. Il numero di equazioni è allora

$$s \times (t-1) + (s-1) \times t + 2 \times s \times t = 4 \times s \times t - s - t.$$

Sostituendo le equazioni (4.9) e (4.9 b) in (4.9 a), otteniamo

$$outgoing_{ij-1}^h + \alpha outgoing_{i-1j}^h = (1 + \alpha) outgoing_{ij}^h. \quad (4.10)$$

Indichiamo con OUT_{ij} la quantità $outgoing_{ij}^h$. Le equazioni (4.10) possono essere scritte come un'equazione di Sylvester nella seguente forma:

$$(1 + \alpha)OUT - \alpha L(s)OUT - OUTL(t)^T - in = 0,$$

dove la matrice di inflow è:

$$in = \left[\begin{array}{c|cccccc} x_1^h + x_1^v & x_2^h & x_3^h & x_4^h & x_5^h & \dots & x_t^h \\ \hline x_2^v & & & & & & 0 \\ x_3^v & & & & & & 0 \\ x_4^v & & & \square & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \hline x_s^v & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right].$$

Riscriviamo la precedente equazione matriciale come:

$$\alpha(I(s) - L(s))OUT + OUT(I(t) - L(t)^T) - in = 0$$

e, indicando con $A = \alpha(-I(s) + L(s))$ e $B = (-I(t) + L(t))^T$, si ha:

$$AOUT + OUTB + in = 0.$$

(4.11)

OUT risolve la precedente equazione di Sylvester (4.11), allora

$$OUT = \frac{1}{2}C_{\infty},$$

dove

$$C_0 = in,$$

$$C_{k+1} = \frac{1}{2}(C_k + A_k^{-1}C_k B_k^{-1}).$$

Si può dimostrare che vale la seguente proposizione:

Proposizione. Si consideri una rete con tutti i nodi del tipo $II0$. L'insieme degli outflow è un sottospazio di R^{s+t} di dimensione $\max(s, t)$.

Si consideri ora una rete con tutti i nodi di tipo $III0$. Abbiamo le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned} outgoing_{ij}^h &= incoming_{ij+1}^h, \\ outgoing_{ij}^v &= incoming_{i+1j}^v \end{aligned} \quad (4.12)$$

per tutti gli $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, t$, dove

$$[incoming(s+1, 1), incoming(s+1, 2), \dots, incoming(s+1, t)] = y^h \in R^t$$

e

$$[incoming(1, t+1), incoming(2, t+1), \dots, incoming(s, t+1)] = y^v \in R^s,$$

sono i vettori degli outflow.

Inoltre, abbiamo che le equazioni (4.9 a) e

$$incoming_{ij}^v = p incoming_{ij}^v, \quad (4.12 b)$$

sono valide per tutti gli $i = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, t$. Il numero di equazioni è pari a $s \times (t-1) + (s-1) \times t + 2 \times s \times t = 4 \times s \times t - s - t$.

Sostituendo le equazioni (4.12) e (4.12 b) in (4.9 a), otteniamo

$$incoming_{ij+1}^h + p incoming_{i+1j}^h = (1+p) incoming_{ij}^h.$$

Indichiamo con IN_{ij} la quantità $incoming_{ij}^h$. Otteniamo la seguente equazione matriciale:

$$(1+p)IN - pL(s)^T IN - INL(t) - out = 0,$$

dove la matrice di outflow è:

$$out = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_1^v \\ \hline 0 & & & & & y_2^v \\ 0 & & & & & y_3^v \\ 0 & & \square & & & y_4^v \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \hline y_1^h & y_2^h & y_3^h & y_4^h & \cdots & y_t^h + y_s^v \end{array} \right].$$

Riscriviamo la matrice precedente nella forma:

$$p(I(s) - L(s)^T)IN + IN(I(t) - L(t)) - out = 0$$

e, indicando con $A = p(-I(s) + L(s))$ e $B = (-I(t) + L(t))^T$, si ha:

$$A^T IN + INB^T + out = 0. \quad (4.13)$$

OUT risolve la precedente equazione di Sylvester (4.13), allora

$$OUT = \frac{1}{2}C_\infty,$$

dove

$$C_0 = IN, \\ C_{k+1} = \frac{1}{2}(C_k + A_k^{-T}C_k B_k^{-T}).$$

Con un approccio simile a quello usato per il caso $II0$, vale la seguente proposizione:

Proposizione. *Si consideri una rete con tutti i nodi del tipo $III0$. L'insieme degli inflow è un sottospazio di R^{s+t} di dimensione $\max(s, t)$.*

Si noti che, nel caso $III0$, l'outflow Y può essere scelto in maniera arbitraria.

4.4.3 Soluzione esatta con buco in posizione lk

Abbiamo $4s \times t - 4$ variabili e $4 \times s \times t - s - t - 2$ equazioni per un totale di $s + t + 2$ gradi di libertà. Comunque, come vedremo nel caso 3×3 , la corrispondente matrice B ha rango 2. Quindi, l'immagine è uno spazio di 2 dimensioni in R^5 , e questo significa che non tutti gli outflows possono essere ottenuti facendo variare gli inflows in R^{s+t} .

Si consideri una rete con tutti i nodi del tipo $II0$. Calcoliamo l'equilibrio ponendo le incognite

$OUT_{lk} = 0, OUT_{l, k-1} = 0, OUT_{l-1, k} = 0$. Quindi, indichiamo con OUT^v e OUT^h le matrici con:

$$\begin{cases} OUT_{ij}^v = 0 & \text{se } i = l-1, l \text{ e } j = k, \\ OUT_{ij}^v = OUT_{ij} & \text{altrimenti,} \\ OUT_{ij}^h = 0 & \text{se } i = l \text{ e } j = k-1, k, \\ OUT_{ij}^h = OUT_{ij} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e scriviamo la nuova equazione matriciale nel seguente modo:

$$OUT^h + \alpha OUT^v = \alpha L(s) OUT^v + OUT^h L(t)^T + in.$$

Riscriviamo l'ultima equazione matriciale nella forma:

$$\alpha(I(s) - L(s))OUT^v + OUT^h(I(t) - L(t)^T) - in = 0$$

ovvero

$$AOUT^v + OUT^h B + in = 0.$$

Si consideri ora una rete con tutti nodi del tipo $III0$. Calcoliamo l'equilibrio ponendo le incognite

$$IN_{lk} = 0, IN_{l,k+1} = 0, IN_{l+1,k} = 0.$$

Indichiamo poi con IN^v e IN^h le matrici con:

$$\begin{cases} IN_{ij}^v = 0 & \text{se } i = l, l+1 \text{ e } j = k, \\ IN_{ij}^v = IN_{ij} & \text{altrimenti,} \\ IN_{ij}^h = 0 & \text{se } i = l \text{ e } j = k, k+1, \\ IN_{ij}^h = IN_{ij} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e scriviamo la nuova equazione matriciale nel seguente modo:

$$IN^h + pIN^v = pL(s)^T IN^v + IN^h L(t) + out,$$

ovvero

$$p(I(s) - L(s)^T)IN^v + IN^h(I(t) - L(t)) - out = 0$$

$$A^T IN^v + IN^h B^T + out = 0.$$

Esempio. Consideriamo la seguente rete rete 3x3 con un buco:

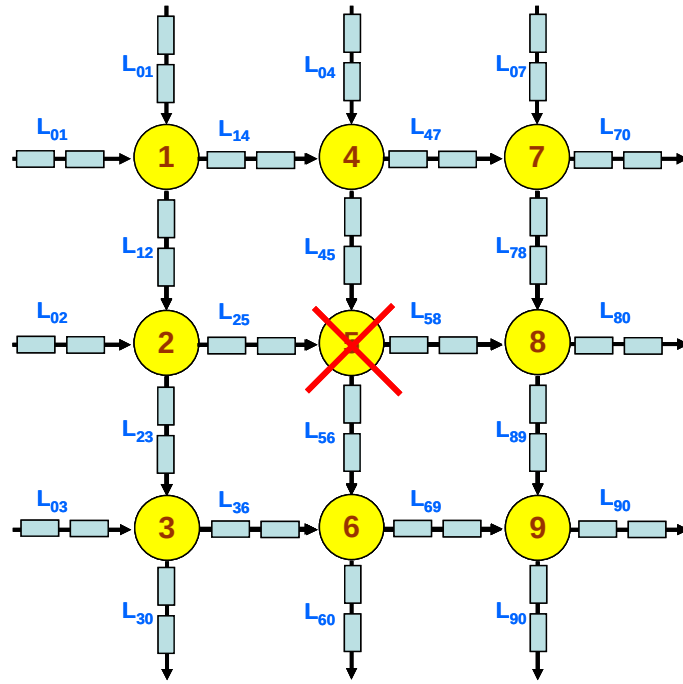


Fig 4.2: rete 3x3 con buco

Riscriviamo le equazioni (4.9 a) nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^h + x_1^v = (1 + \alpha)OUT_{11} \\ x_2^v + \alpha OUT_{11} = \alpha OUT_{21} \\ x_2^h + OUT_{11} = OUT_{12} \\ OUT_{12} + x_3^h = (1 + \alpha)OUT_{13} \\ \alpha OUT_{21} + x_3^v = (1 + \alpha)OUT_{31} \\ \alpha OUT_{13} = (1 + \alpha)OUT_{23} \\ OUT_{31}^h = (1 + \alpha)OUT_{32} \\ \alpha OUT_{23} + OUT_{32} = (1 + \alpha)OUT_{33}. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

e la soluzione relative agli outflow può essere scritta come $B' \cdot x = y$ dove $x = [x_1, x_2^h, x_3^h, x_2^v, x_3^v]$,

con $x_1 = x_1^h + x_1^v$, $y = [OUT_{13}, OUT_{23}, OUT_{33}, OUT_{31}, OUT_{32}]$ e

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+\alpha)^2} & \frac{1}{1+\alpha} & \frac{1}{1+\alpha} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{1}{(1+\alpha)^3} & \alpha \frac{1}{(1+\alpha)^2} & \alpha \frac{1}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0 \\ \alpha \frac{1}{(1+\alpha)^3} & \alpha^2 \frac{1}{(1+\alpha)^3} & \alpha^2 \frac{1}{(1+\alpha)^3} & \frac{1}{(1+\alpha)^3} & \frac{1}{(1+\alpha)^3} \\ \alpha \frac{1}{(1+\alpha)^2} & 0 & 0 & \frac{1}{1+\alpha} & \frac{1}{1+\alpha} \\ \alpha \frac{1}{(1+\alpha)^3} & 0 & 0 & \frac{1}{(1+\alpha)^2} & \frac{1}{(1+\alpha)^2} \end{bmatrix}.$$

Si noti che $rank(Bb) = 2$ quindi se vi è un buco nella rete, non possiamo ristabilire gli outflow originali. Quello che si potrebbe fare è trovare il punto y' nell'immagine di B' , ovvero $y' = B' \cdot x'$, che è alla minima “distanza” dall'outflow originale $y = B \cdot x$ e trovare il nuovo inflow x' tale che $B' \cdot x' = y'$. La distanza deve essere scelta in maniera tale da ben modellare la qualità di servizio che si vuole ottenere. In particolare, abbiamo che B' genera un sottospazio di dimensione 2 in R^5 generato dai vettori:

$$\begin{aligned} v_1 &= [1, \frac{\alpha}{(1+\alpha)}, 0, -\alpha^2, -\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)}], \\ v_2 &= [0, 0, 1, (1+\alpha)^2, (1+\alpha)]. \end{aligned}$$

5 Bibliografia

- [1] D. Alderson, H. Chang, M. Roughan, S. Uhlig and W. Willinger, The many facets of internet topology and traffic. *Netw. Heterog. Media* 1 (2006), no. 1, 569-600.
- [2] D. Amadori, Initial-boundary value problems for systems of conservation laws, *NoDEA*, 4 (1997), pp. 1-42.
- [3] F. Ancona and A. Marson, Scalar non-linear conservation laws with integrable boundary data, *Nonlinear Analysis*, 35 (1999), pp. 687-710.
- [4] Aw, A., Klar, A., Materne, T. and Rascle, M, Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models, *SIAM J. Appl. Math.* 63 (2002), n. 1, 259--278.
- [5] Baccelli, Francois; Bremaud, Pierre. *Elements of queueing theory. Palm martingale calculus and stochastic recurrences*. Applications of Mathematics (New York), 26. Stochastic Modelling and

Applied Probability. Springer-Verlag, Berlin, 2003. xiv+334 pp. ISBN: 3-540-66088-7

- [6] C. Bardos and A. Y. Le Roux and J. C. Nedelec, First Order Quasilinear Equations with Boundary Conditions, *Commun. Partial Differential Equations*, 4 (1979), pp. 1017-1034.
- [7] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws - The One-dimensional Cauchy Problem*, Oxford Univ. Press, 2000.
- [8] A. Bressan, G. Crasta, B. Piccoli, Well-Posedness of the Cauchy Problem for $n \times n$ Systems of Conservation Laws, *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 146, n. 694 (2000).
- [9] Y. Chitour, B. Piccoli, Traffic circles and timing of traffic lights for cars flow, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, vol. 5 (2005), pp. 599--630.
- [10] G. Coclite, M. Garavello and B. Piccoli, Traffic Flow on Road Networks, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 36 (2005), n. 6, pp. 1862--1886.
- [11] C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer-Verlag, 1999.
- [12] C. D'Apice, R. Manzo and B. Piccoli, Packets flows on a telecommunication network, *SIAM J. Mat. Anal.* 38 (2006), pp. 717--740.
- [13] M. Garavello and B. Piccoli, Traffic flow on a road network using the Aw-Rascle model, *Communications PDE* 31 (2006), pp. 243--275.
- [14] L. Heffter, Ueber das Problem der Nachbargabeite, *Mat. Annalen* 38 (1891), pp. 477--508.
- [15] D. Hilbert and S. Cohn--Vossen, *Geometria Intuitiva*, Paolo Boringhieri--Torino, 1932.
- [16] Kelly, Frank. *Mathematical modelling of the Internet. Mathematics unlimited--2001 and beyond*, 685--702, Springer, Berlin, 2001.
- [17] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, On kinetic waves. II. Theory of Traffic Flows on Long Crowded Roads, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 229 (1955), pp. 317-345.
- [18] Liu, Tai Ping. Decay to N -waves of solutions of general systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.* 30 (1977), no. 5, 586--611.
- [19] A. Marigo, Equilibria for Data Networks, *Networks and Heterogeneous Media*, vol. 2 (2007), n. 4 pp. 497--528
- [20] A. Marigo, Optimal traffic distribution and priority coefficients for telecommunication networks, *Networks and Heterogeneous Media*, vol. 1, n.2, pp. 315--336.
- [21] P. I. Richards, Shock Waves on the Highway, *Oper. Res.*, 4, (1956), pp. 42-51.
- [22] Sinestrari, Carlo. Asymptotic profile of solutions of conservation laws with source. *Differential Integral Equations* 9 (1996), no. 3, 499--525.